Étude cinématique de quelques mécanismes élémentaires.

(Suite. Voir D. C., du 20-6-63 [1].)

Idées directrices.

Les thèmes présentés ont été expérimentés systématiquement au lycée de Montgeron, selon les modalités décrites ci-après. Mais dans de nombreux établissements (Lycées ou Collèges d'Enseignement général), des travaux analogues ont été poursuivis, avec des variantes plus ou moins marquées dans la méthode ou dans le matériel utilisé. C'est la preuve, pensons-nous, que ces thèmes répondent à des préoccupations assez largement répandues, et que cette fiche est susceptible d'intéresser un vaste public.

Lorsque nous avons entrepris ces expériences à Montgeron, notre objectif principal était de poser les bases d'une véritable initiation à la méthode scientifique, *dans un domaine où les jeunes élèves pourraient, par leur propre activité, se livrer à une recherche expérimentale authentique. La recherche scientifique consiste à* CONSTRUIRE *des appareils et à monter des expériences, à* INTERPRÉTER *les résultats de ces expériences par un système de concepts abstraits, à combiner ces concepts abstraits de façon à* IMAGINER DE NOUVELLES EXPÉRIENCES *dont les résultats feront l'objet d'une* PRÉVISION, *et enfin à* VÉRIFIER *ces prévisions en réalisant les nouvelles expériences.*

Nous avons choisi l'étude des mécanismes élémentaires pour deux raisons :

D'une part la technique de manipulation et de construction *des appareils nous a paru accessible aux élèves du cycle d'observation, à condition de mettre entre les mains de ces derniers un jeu de pièces mécaniques standardisées, faciles à assembler et se prêtant à de multiples combinaisons. Malgré ses défauts évidents, le système « Meccano » est, à cette date, celui qui remplit le mieux ces conditions, parmi tous les matériels scientifiques concurrents de création récente.*

D'autre part, les concepts abstraits *qui sont mis en jeu dans l'interprétation élémentaire des expériences sont* LES NOTIONS MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES *dont l'acquisition paraît nécessaire au cours du cycle d'observation :*

- *rapport de deux grandeurs et inverse d'un rapport;*
  introduction des nombres fractionnaires;
  multiplication des nombres fractionnaires;
- *addition de deux grandeurs :*
  représentation de grandeurs orientées par des mesures algébriques;
  introduction des nombres positifs et négatifs;
  somme généralisée de nombres positifs ou négatifs;
- *combinaison de l'addition et de la multiplication;*
  loi de distributivité;
  multiplication des nombres positifs ou négatifs.

Il nous a paru ainsi que les travaux expérimentaux de cinématique pourraient donner aux élèves l'occasion d'illustrer ces concepts mathématiques; soit que les manipulations viennent après l'étude mathématique et apportent une consolidation des notions théoriques fraîchement acquises, soit que les manipulations précèdent l'étude mathématique et soulèvent des problèmes qui provoquent la réflexion des enfants et préparent le terrain à la formulation mathématique.

L'expérience a pleinement confirmé ces hypothèses; elle a montré que les travaux proposés non seulement sont parfaitement accessibles aux élèves du cycle d'observation, mais encore éveillent chez eux un intérêt très vif (même chez les filles), lié à l'intérêt que les enfants portent spontanément aux réalisations techniques.

(1) *Nos nouveaux lecteurs apprendront sans doute avec satisfaction que l'Institut Pédagogique National est à même de leur fournir, dans la collection des « Dossiers Documentaires », la série complète des fiches de Travaux Scientifiques Expérimentaux qui ont paru dans* Documents pour la Classe *au cours de l'année 1962-1963. Ce dossier est en vente au SEVPEN et dans les Centres Régionaux de Documentation Pédagogique.*

3. — MÉCANISME VIS-ÉCROU

Montage de l'appareil.

La *figure I* ci-contre montre une réalisation simple, obtenue au moyen de pièces « Meccano ». Un chariot est guidé en translation par deux glissières rectilignes et parallèles (cornières); il est solidaire d'un écrou monté sur une « *vis-mère* » ou tige filetée. On peut utiliser pour ce montage la tige filetée Meccano (n° 82) avec le « *bras de manivelle taraudé* » (n° 62 *a*), ou encore une *tige filetée du commerce*, de 6 mm de diamètre, sur laquelle on pratiquera aux extrémités deux portées cylindriques de 4 mm et qu'on adaptera à la pièce Meccano n° 62 dont le trou aura été taraudé convenablement. Cette seconde solution exige un certain travail d'atelier, mais permet d'obtenir une vis de pas métrique (ce qui n'est pas le cas de la tige filetée Meccano).

La vis est guidée en rotation par deux paliers, et deux butées (ou bagues d'arrêt) empêchent son mouvement de translation. Dans ces conditions, une rotation de la vis, commandée par une manivelle et repérée par un index devant un cercle gradué (le cercle gradué n'est utile que pour mesurer des fractions de tour), entraîne une translation du chariot, repéré sur une règle graduée en millimètres.

Étude technologique du mécanisme.

RELATIONS VIS-ÉCROU

On peut mettre l'appareil tout monté entre les mains des élèves et demander à ces derniers de le démonter et de le remonter pour étudier sa construction. On peut aussi le faire construire entièrement par les élèves en se guidant d'après un modèle ou, mieux, leur demander de l'inventer directement en s'inspirant de machines industrielles (chariot de tour).

Dans tous les cas, les élèves auront à reconnaître les principaux organes, à expliquer leur fonction et leurs connexions mutuelles, à dessiner des schémas et des croquis partiels. Cette étude technologique serait avantageusement complétée par une investigation aussi étendue que possible des réalisations familières qui utilisent le mécanisme vis-écrou et des divers montages permis par ce mécanisme.

— Vis fixe et écrou mobile (mouvement combiné de translation et rotation).

— Écrou fixe et vis mobile (mouvement combiné de translation et rotation).

— Écrou guidé en rotation, vis guidée en translation.

— Vis guidée en rotation, écrou guidé en translation.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DE LA VIS

Pour mieux comprendre la transformation des mouvements, les élèves auront intérêt à étudier de plus près la ligne tracée par les filets de la vis, c'est-à-dire la courbe géométrique appelée « *hélice* ».

La représentation la plus simple consiste *à tracer une droite sur une feuille de papier millimétrique et à enrouler ensuite cette feuille sur un cylindre de carton.*

Pour obtenir une hélice continue, il faudra évidemment tracer au préalable plusieurs segments de droite parallèles d'inclinaison convenable afin de permettre le raccordement lors de l'enroulement. Cette méthode permet d'obtenir facilement des images de vis à filets multiples, de vis à droite ou à gauche, en les confrontant avec des pièces mécaniques réelles.

Une représentation plus élaborée consiste à *enrouler sur le cylindre une moulure ou corde de caoutchouc* (de profil triangulaire, carré, rectangulaire à volonté) et *à coller ce filet rapporté sur le cylindre.*

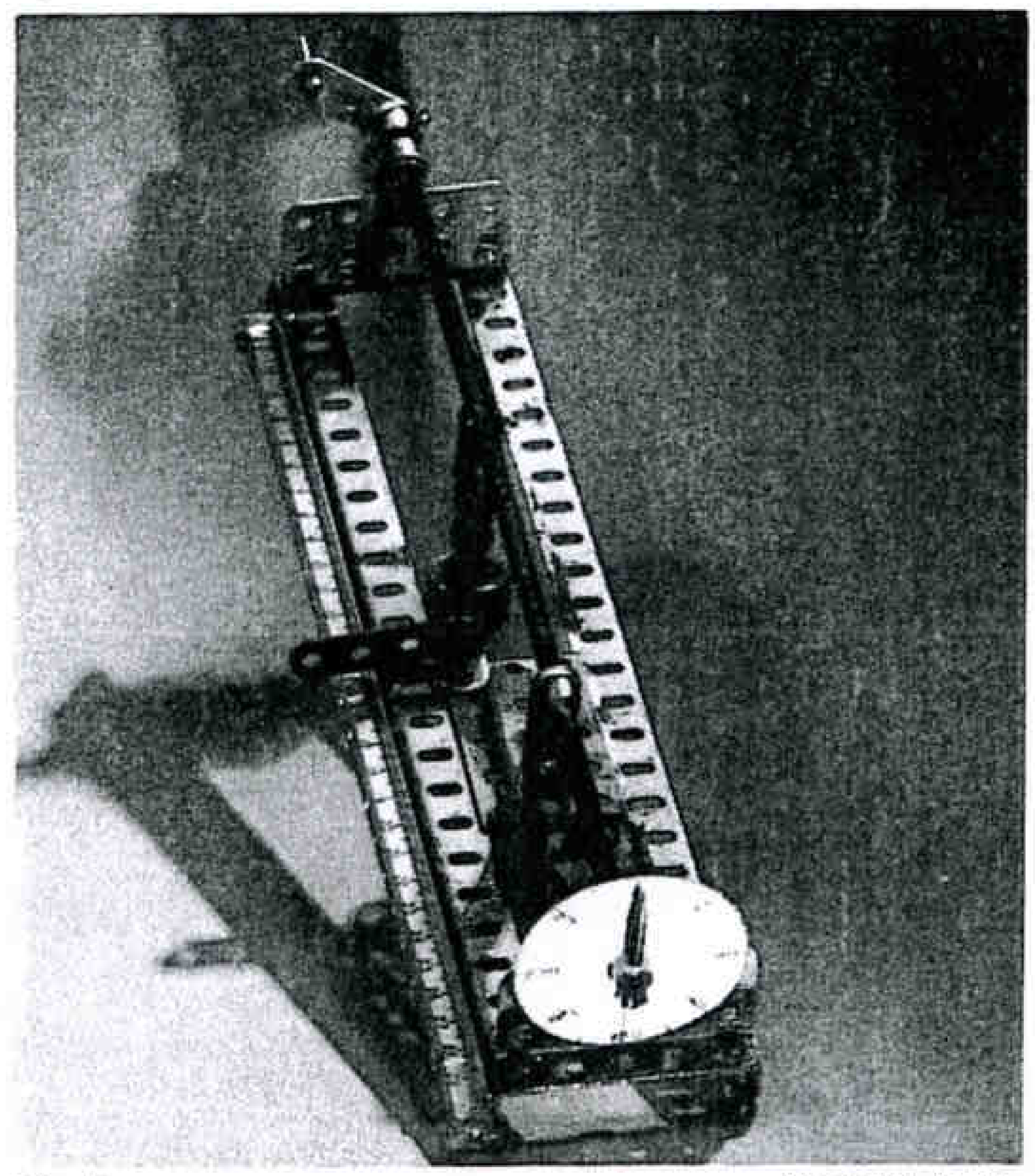

Fig. I. Photo I. P N.

Relation entre la rotation de la vis et la translation de l'écrou.

L'étude expérimentale du mécanisme, au point de vue purement cinématique, consiste à dresser un tableau de mesures : on portera sur ce tableau d'une part des valeurs données à l'angle de rotation (on pourra se borner au début, pour simplifier, à des nombres entiers de tours) (1), d'autre part les longueurs des translations correspondantes pour le chariot.

Voici un exemple d'un tel tableau :

Angles de rotation de la vis.	Longueurs de translation du chariot.
10 tr	10 mm
20 tr	20 mm
30 tr	30 mm
...	...

Ce tableau met en évidence une relation de proportionnalité entre les mesures de ces deux grandeurs : ce qui s'exprimera en disant que si on considère deux grandeurs de la première colonne (*par exemple 30 tr et 10 tr*) et les deux grandeurs correspondantes de la seconde colonne (*30 mm et 10 mm*), les rapports de ces deux paires de grandeurs sont égaux :

$$\frac{30 \text{ tr}}{10 \text{ tr}} = 3 \qquad \frac{30 \text{ mm}}{10 \text{ mm}} = 3.$$

Mais il serait incorrect de parler d'un rapport entre un angle de rotation et une longueur de translation : il nous vaut mieux dire que les quotients de chaque longueur de translation par l'angle de rotation correspondant s'expriment au moyen d'une « *unité composée* » *qu'on appelle le pas de la vis :*

$$\frac{10 \text{ mm}}{10 \text{ tr}} = \frac{20 \text{ mm}}{20 \text{ tr}} = \frac{30 \text{ mm}}{30 \text{ tr}} = 1 \text{ mm/tr}.$$

La tige filetée Meccano a un pas d'environ 0,78 mm/tr.

Cette relation de proportionnalité peut donner lieu évidem-

(1) *N. D. L. R. — Le tour est une unité d'angle. Prendre le mot « angle » dans son acception la plus générale ($\alpha + 2\,n\,\pi$) : pour un nombre entier de tours $\alpha = 0$.*

ment à des représentations graphiques, en portant en abscisses les angles de rotation et en ordonnées les longueurs de translation.

Mesure des translations. Nombres négatifs.

Dans le cas particulièrement simple, où le pas de la vis vaut 1 mm par tour, on comprend immédiatement que le nombre de tours de la vis puisse servir à mesurer la longueur de translation du chariot. (Ce principe est valable dans tous les cas, à condition d'effectuer une multiplication.)

Si maintenant on porte son attention non seulement sur la *grandeur des déplacements du chariot*, mais aussi sur leur sens, on est conduit à distinguer deux sens de rotation, chacun d'eux étant associé à un sens de translation. On arrive ainsi à la notion de nombre positif ou négatif, quand on veut mesurer une translation en indiquant en même temps son sens. Le nombre de tours de la vis représente aussi une mesure de la translation dans l'un ou l'autre sens, suivant qu'il s'agit d'un nombre positif ou négatif.

Si on effectue successivement plusieurs rotations de mesures algébriques données, il en résulte une succession correspondante de translations également mesurées algébriquement. La notion de « *somme algébrique* » en découle immédiatement.

On arrive ainsi au « *groupe additif* » des nombres positifs ou négatifs, dont l'étude est facile à faire sur le modèle du groupe multiplicatif. On constatera notamment le rôle particulier joué par le nombre zéro dans l'addition, analogue au rôle joué par le nombre 1 dans la multiplication (2).

(2) *N. D. L. R. — Ex. : $4 + 0 = 4$; $4 \times 1 = 4$. Les « opérations » 0 et 1 n'ont rien changé au nombre 4 : ce sont des « neutres ».*

4. — COMBINAISON D'UN TRAIN D'ENGRENAGES AVEC LE MÉCANISME VIS-ÉCROU

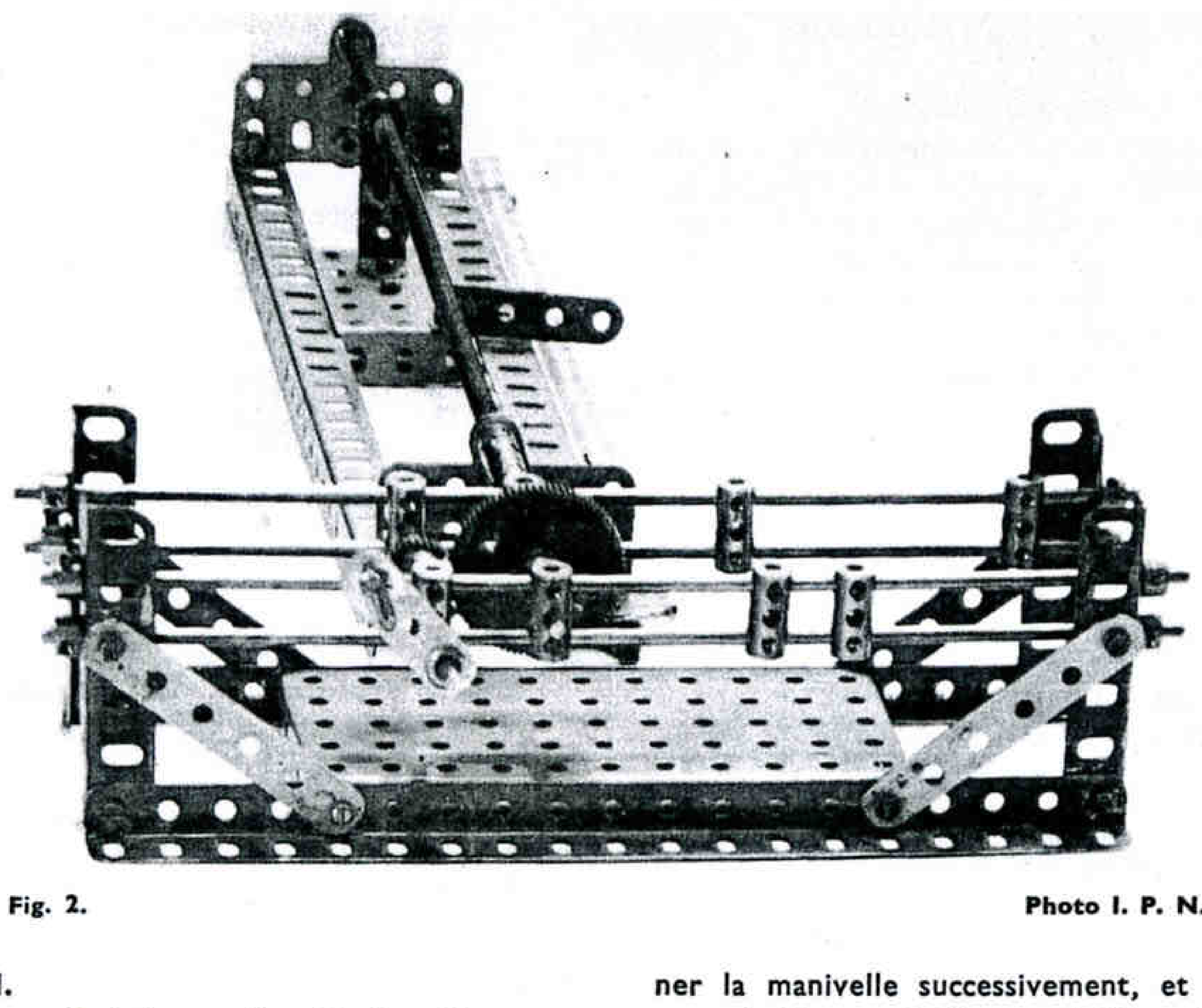

Fig. 2. Photo I. P. N.

Montage de l'appareil.

Comme l'indique la *figure* 2 ci-dessus, il suffit de relier par un manchon de couplage la vis à l'arbre de sortie du train d'engrenages.

On peut aussi (*figure 3*) utiliser deux appareils à vis, l'une des vis étant commandée par l'arbre d'entrée, l'autre par l'arbre de sortie du train d'engrenages. Ce dispositif transforme en deux translations parallèles les deux rotations étudiées simultanément : d'une part la rotation que l'opérateur communique à la manivelle d'entrée, d'autre part la rotation qui résulte de la multiplication de la première par le multiplicateur du train d'engrenages.

Ce montage permet ainsi d'étudier *les combinaisons de l'addition avec la multiplication*.

Étude expérimentale de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

CAS D'UNE SOMME ARITHMÉTIQUE

Supposons que les vis aient un pas de 1 mm/tr. Faisons tourner la manivelle successivement, et toujours dans le même sens, de 12 tr, puis 60 tr, puis 36 tr. Le chariot commandé par la vis liée à l'arbre d'entrée (manivelle) se déplace successivement de 12 mm, puis 60 mm, puis 36 mm, soit au total 108 mm.

Si le train d'engrenages est formé de trois arbres parallèles et a un multiplicateur global égal à $\frac{1}{4}$ par exemple, l'arbre de sortie effectue les mêmes rotations multipliées par $\frac{1}{4}$, et le chariot commandé par la vis liée à l'arbre de sortie se déplacera du total de :

$$\left(\frac{1}{4} \times 12 \text{ mm}\right) + \left(\frac{1}{4} \times 60 \text{ mm}\right) + \left(\frac{1}{4} \times 36 \text{ mm}\right)$$
$$= \frac{1}{4} \times 108 \text{ mm} ;$$

on illustre ainsi la loi de distributivité qui peut s'écrire sous la forme générale :

$$m \times A + m \times B + m \times C = m \times (A + B + C).$$

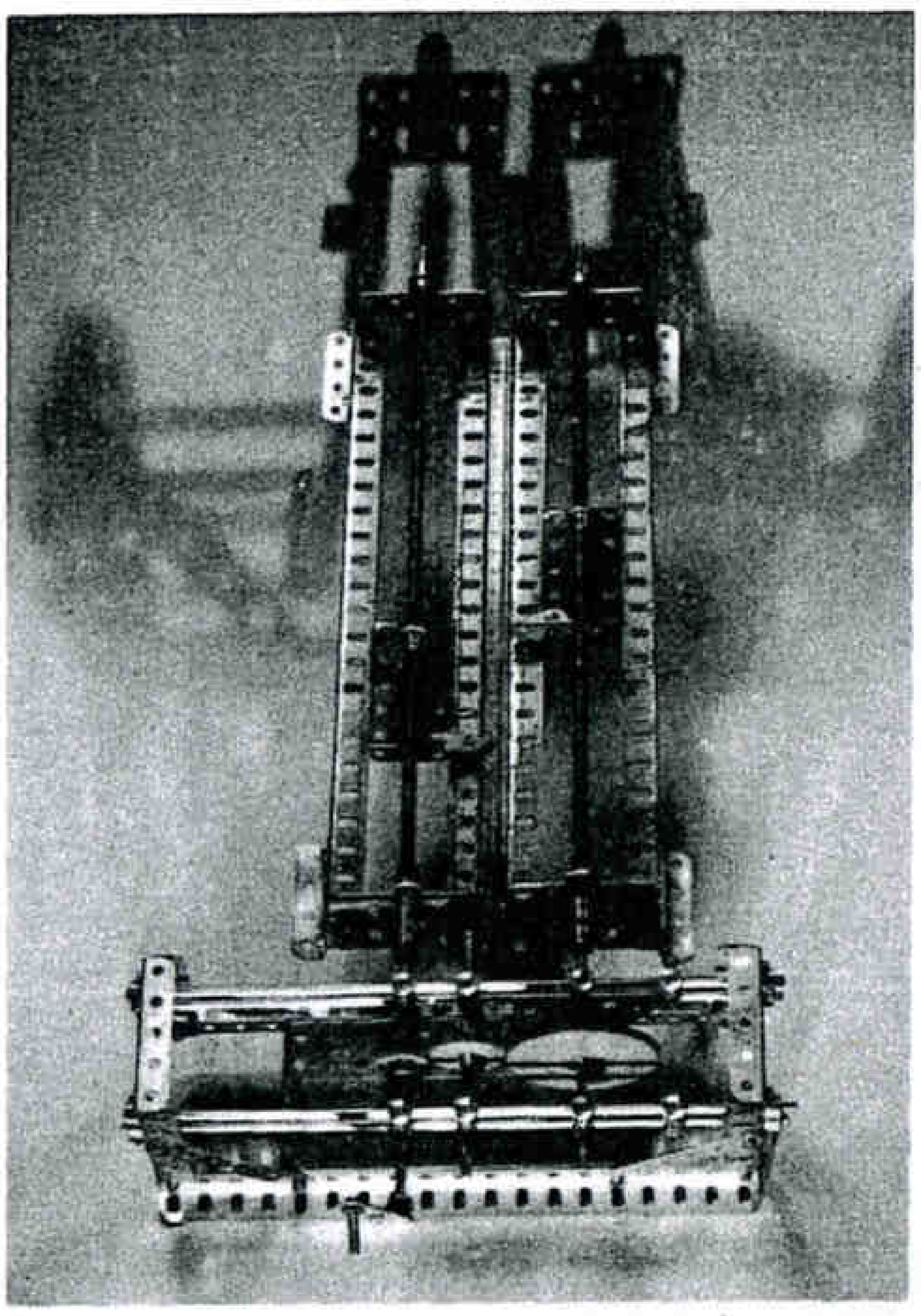

Fig. 3. Photo I. P. N.

CAS D'UNE SOMME ALGÉBRIQUE

Si les rotations de la manivelle ne sont pas toutes dans le même sens, les unes doivent être comptées positivement, les autres négativement (suivant une convention arbitraire). Les translations du premier chariot seront mesurées de même par des nombres tantôt positifs, tantôt négatifs, et le déplacement résultant sera représenté par une somme algébrique telle que :

$$(-12 \text{ mm}) + (+60 \text{ mm}) + (-36 \text{ mm}) = (+12 \text{ mm}).$$

Le second chariot, commandé par l'arbre de sortie du train d'engrenages, effectue pendant ce temps un déplacement représenté par :

$$\left[\frac{1}{4} \times (-12 \text{ mm})\right] + \left[\frac{1}{4} \times (+60 \text{ mm})\right] + \left[\frac{1}{4} \times (-36 \text{ mm})\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[(-12 \text{ mm}) + (+60 \text{ mm}) + (-36 \text{ mm})\right]$$

Il s'agit toujours de la même loi de distributivité que précédemment, les grandeurs A, B, C étant cette fois mesurées par des nombres positifs ou négatifs.

INTRODUCTION D'UN MULTIPLICATEUR NÉGATIF

Nous avons dit plus haut que le train d'engrenages était constitué par trois arbres parallèles, et par suite les rotations des deux arbres (entrée et sortie) et des deux vis se font dans le même sens, ainsi que les translations parallèles des deux chariots.

Si on réalise le même multiplicateur $\left(\frac{1}{4}\right)$ avec une transmission à deux roues dentées seulement, la rotation de sortie est inversée par rapport à la rotation d'entrée, et la translation du second chariot est également inversée par rapport à celle du premier chariot.

Il est naturel d'interpréter cette situation en considérant que le multiplicateur du train d'engrenages peut être non pas un nombre arithmétique, mais un nombre doué de signe : le signe + signifiant que le sens du mouvement est conservé, le signe — que le sens est inversé.

On écrira donc ainsi le déplacement résultant du second chariot :

$$\left[\left(-\frac{1}{4}\right) \times (-12 \text{ mm})\right] + \left[\left(-\frac{1}{4}\right) \times (+60 \text{ mm})\right]$$
$$+ \left[\left(-\frac{1}{4}\right) \times (-36 \text{ mm})\right],$$

et les « *règles des signes* » seront faciles à introduire et à justifier.

Généralisation du groupe multiplicatif (nombres positifs ou négatifs).

A la suite des travaux qui précèdent et de leur interprétation, on parviendra facilement à l'*idée générale de multiplication de deux nombres quelconques, positifs et négatifs*. On pourra revenir sur la notion de multiplicateur d'une transmission et lui attribuer un signe suivant que le sens du mouvement de rotation est conservé ou inversé. Une transmission formée par une paire de roues dentées a toujours un multiplicateur négatif; en revanche, une transmission par courroie (ou par chaîne) a un multiplicateur négatif ou positif suivant que la courroie est croisée ou non.

Une succession de transmissions, telle qu'un train d'engrenages, aura un multiplicateur global représenté par le produit des multiplicateurs successifs, chacun d'eux étant pris avec son signe. C'est ainsi qu'un train d'engrenages à trois ou cinq arbres parallèles a un multiplicateur positif, un train à deux ou quatre arbres un multiplicateur négatif, et ainsi de suite.

Problèmes sur le mouvement uniforme.

Imaginons que la manivelle qui commande les deux mouvements de translation parallèles (*fig. 3*) soit animée d'un mouvement uniforme, et que la durée d'un tour de manivelle soit prise pour unité de temps (on peut utiliser un moteur si on le désire). Le montage réalisé représente donc deux mouvements de translation uniforme parallèles, dont les vitesses sont dans un rapport déterminé : les deux mouvements de translation peuvent être de même sens ou de sens inverse.

On peut ainsi réaliser expérimentalement tous les problèmes dans lesquels on étudie deux mouvements rectilignes uniformes (*courriers*), allant soit dans le même sens (*dépassement*), soit en sens inverse (*croisement*). La solution obtenue par le calcul ou par la méthode graphique sera vérifiée expérimentalement avec une excellente précision (à 1 mm près).

CONCLUSION

Comme nous le disions en commençant, l'expérience a surtout visé au début à placer les élèves dans les conditions favorables au travail personnel et à la recherche, dans un climat de liberté et d'initiative, et à permettre une lente imprégnation des concepts mathématiques de base à la lumière de l'expérience scientifique. Non seulement cet objectif est parfaitement accessible aux élèves du cycle d'observation, mais par surcroît ces travaux se sont révélés porteurs d'une valeur éducative supplémentaire : l'initiation scientifique et mathématique s'accompagne en effet d'une initiation technique, qui prépare les élèves à la compréhension de mécanismes plus compliqués, dans lesquels se retrouvent les mêmes mécanismes élémentaires : boîtes de vitesses, différentiels, horloges, tour à chariotage automatique, etc. Par ailleurs, les travaux élémentaires proposés apportent déjà de nombreuses occasions d'initier les élèves aux méthodes du symbolisme graphique, au moyen de schémas d'abord très simples, puis de plus en plus soignés et explicites. Ainsi l'ensemble de ces travaux scientifiques représente une excellente initiation à l'enseignement technologique, que les nouvelles instructions se proposent d'introduire au niveau de la classe de quatrième.